

Chapitre 3

Divisibilité et Nombres Premiers

Compétences :

Exemples d'activités, commentaires :

Début : Fin :

Les critères de divisibilité seront démontrés en 4ème dans le cours Calcul Littéral
Chercher les diviseurs d'un nombre ou si un nombre est premier avec calculatrices, tableurs.
Décomposition dans des cas simples en facteurs premiers

Ex :
I3

DSTA

DM3
5/5

I. Choisir la bonne opération

Activité 1

- 1) $26 : 2 = 13$ *Oui il y aura une loupe pour chaque groupe.*
 2) $25 \times 9,40 = 235$ $915,3 + 235 + 10,7 = 1161$ *La commande dépasse 1000€.*
 3) $10,7 : 5 = 2,14$ *Le prix d'une boîte est de 2,14€.*
 4) $915,3 : 15 = 61,02$ *Le prix d'une loupe binoculaire est de 61,02€.*

II. Division Euclidienne (entière)

Activité 2

- 1) a) *Calcul de la longueur de l'ensemble des 27 perles*
 $18 \times 27 = 486$ et $486 < 500$
On peut utiliser 27 perles car l'ensemble des 27 perles a une longueur de 486 mm et le fil de nylon mesure 500mm.
 b) *Calcul de la longueur de l'ensemble des 28 perles*
 $18 \times 28 = 504$ et $504 > 500$
On ne peut utiliser 28 perles car l'ensemble des 28 perles a une longueur de 504 mm et le fil de nylon mesure 500 mm.
- 2) $18 \times 27 < 500 < 18 \times 28$
- 3) a) $500 - 486 = 14$
Il reste 14 mm de fil pour pouvoir fermer le collier.
 b) $500 = (18 \times 27) + 14$
- 4) a) *Le plus grand nombre de perles pouvant constituer un collier est 27.*
 b) $6 \times 27 = 162$ $7 \times 27 = 189$
Elle pourra confectionner au maximum 6 colliers avec ses 180 perles.
 c) $180 - 162 = 18$ *Oui il reste 18 perles.*
 d) $180 = (27 \times 6) + 18$

Définition :

a et b désignent deux nombres entiers positifs avec $b \neq 0$.

Effectuer la division euclidienne de a par b signifie déterminer deux nombres entiers positifs q et r tels que : $a = b \times q + r$ et $r < b$

q s'appelle le quotient entier et r s'appelle le reste.

$$\begin{array}{r|l} a & b \\ r & q \end{array}$$

Annexe 1
Exemple :

Division euclidienne de 377 par 12															
<div style="display: flex; align-items: center;"> <div style="margin-right: 20px;"> <p>dividende →</p> <p>reste →</p> </div> <table style="border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">377</td><td style="padding: 5px;">12</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">- 36</td><td style="padding: 5px;">31</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">-----</td><td style="padding: 5px;"></td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">17</td><td style="padding: 5px;"></td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">- 12</td><td style="padding: 5px;"></td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">-----</td><td style="padding: 5px;"></td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">5</td><td style="padding: 5px;"></td></tr> </table> <div style="margin-left: 20px;"> <p>← diviseur</p> <p>← quotient</p> </div> </div> <p style="text-align: center; color: green; margin-top: 10px;">$377 = 12 \times 31 + 5$ avec $5 < 12$</p>	377	12	- 36	31	-----		17		- 12		-----		5		<div style="text-align: center; color: green; font-weight: bold; font-size: 1.2em;"> $377 = 12 \times 31 + 5$ </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-top: 10px;"> <div style="text-align: center;"> <p style="color: green;">Dividende</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p style="color: blue;">Diviseur</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p style="color: red;">Quotient</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p style="color: orange;">Reste</p> </div> </div>
377	12														
- 36	31														

17															
- 12															

5															

Applications :

Activité 3

<p style="text-align: center;">1)a)</p> <table style="margin: auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">264</td><td style="padding: 5px;">15</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">- 15</td><td style="padding: 5px;">17</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">-----</td><td style="padding: 5px;"></td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">114</td><td style="padding: 5px;"></td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">- 105</td><td style="padding: 5px;"></td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">-----</td><td style="padding: 5px;"></td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">9</td><td style="padding: 5px;"></td></tr> </table> <p style="text-align: center; margin-top: 10px;">Le quotient est 17 Le reste est 9</p> <p style="text-align: center; margin-top: 10px;">b) $264 = 17 \times 15 + 9$</p>	264	15	- 15	17	-----		114		- 105		-----		9		<p style="text-align: center;">2)a)</p> <table style="margin: auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">1288</td><td style="padding: 5px;">23</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">- 115</td><td style="padding: 5px;">56</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">-----</td><td style="padding: 5px;"></td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">138</td><td style="padding: 5px;"></td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">- 138</td><td style="padding: 5px;"></td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">-----</td><td style="padding: 5px;"></td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">0</td><td style="padding: 5px;"></td></tr> </table> <p style="text-align: center; margin-top: 10px;">Le quotient est 56 Le reste est 0</p> <p style="text-align: center; margin-top: 10px;">b) $1288 = 56 \times 23$</p>	1288	23	- 115	56	-----		138		- 138		-----		0	
264	15																												
- 15	17																												

114																													
- 105																													

9																													
1288	23																												
- 115	56																												

138																													
- 138																													

0																													

III. Diviseurs et Multiples d'un nombre entier

1) Définitions

Activité 4

1)a) 7 divise 28 en effet, $28 = 7 \times 4$. On dit que 7 est un diviseur de 28.

b) 1 et 28 sont des diviseurs de 28 en effet $28 = 28 \times 1$.

$$28 = 2 \times 14$$

$$28 = 4 \times 7$$

Les diviseurs de 28 sont 1 ; 2 ; 4 ; 7 ; 14 et 28.

c) Les nombres a et b étant des nombres entiers strictement positifs, on doit vérifier pour pouvoir affirmer que b est un diviseur de a qu'il existe un nombre entier n tel que $a = b \times n$.

2)a)

1 a un seul diviseur positif lui-même.

2 a deux diviseurs positifs 1 et 2.

5 a deux diviseurs positifs 1 et 5.

6 a quatre diviseurs positifs 1 ; 2 ; 3 et 6.

7 a deux diviseurs positifs 1 et 7.

9 a trois diviseurs positifs 1 ; 3 et 9.

11 a deux diviseurs positifs 1 et 11.

15 a quatre diviseurs positifs 1 ; 3 ; 5 et 15.

b) Le plus petit nombre de diviseurs positifs d'un nombre entier supérieur ou égal à 2 est 2.

Définition :

Soit a et b deux nombres entiers relatifs, avec b non nul.

Lorsque la division euclidienne de a par b donne un reste nul, on dit que :

- a est un multiple de b
- b est un diviseur de a
- a est divisible par b

Annexe 2

Exemples :

1) La division euclidienne de 85 par 17 donne $85 = 17 \times 5 + 0$. Le reste est nul. On dit que : <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-top: 10px;"> <div style="text-align: center;">85 est un multiple de 17 et de 5.</div> <div style="text-align: center;">5 et 17 sont des diviseurs de 85.</div> <div style="text-align: center;">85 est divisible par 17 et par 5.</div> </div>
2) 20 est un multiple de 1; 2; 4; 5; 10 et 20. On peut aussi dire que 1; 2; 4; 5; 10 et 20 sont des diviseurs de 20.

Propriété admise :

Un nombre entier strictement supérieur à 1 admet au moins deux diviseurs : 1 et lui-même.

Remarques :

- ✓ 0 ne divise aucun nombre.
- ✓ Tout nombre est un multiple de 1.

2) Critères de divisibilité

Activité 5

Partie 1

1)

<i>est divisible par</i>	2	3	4	5	9	10
112	X		X			
165		X		X		
2430	X	X		X	X	X
17 325		X		X	X	

2) On peut utiliser des « astuces ».

Par exemple un nombre pair est divisible par 2.

Partie 2

1) Les nombres entiers divisibles par 2 (ou multiple de 2) sont les nombres qui se terminent par 0, 2, 4, 6 ou 8

2) Les nombres entiers divisibles par 5 (ou multiple de 5) sont les nombres qui se terminent par 0 ou 5

3) Les nombres entiers divisibles par 3 (ou multiple de 3) sont les nombres dont la somme des chiffres qui les composent est divisible par 3

4) Les nombres entiers divisibles par 9 (ou multiple de 9) sont les nombres dont la somme des chiffres qui les composent est divisible par 9.

Définition :

Un critère de divisibilité est une règle qui permet de savoir si un nombre entier a est divisible (ou n'est pas divisible) par un nombre entier b différent de 0, sans effectuer la division.

Annexe 3

Critères de divisibilité admis :

- ✓ Un entier est divisible par 2 lorsque son chiffre des unités est pair.
- ✓ Un entier est divisible par 3 lorsque la somme de ses chiffres est divisible par 3.
- ✓ Un entier est divisible par 4 lorsque ses deux derniers chiffres sont divisible par 4.
- ✓ Un entier est divisible par 5 lorsque son chiffre des unités est 0 ou 5.
- ✓ Un entier est divisible par 9 lorsque la somme de ses chiffres est divisible par 9.
- ✓ Un entier est divisible par 10 lorsque son chiffre des unités est 0.

Annexe 4

Exemple :

Le nombre 2 781 est-il divisible par 2; 3; 5 ou 9 ?

- ✓ Le nombre 2 781 n'est pas pair donc, il n'est pas divisible par 2.
- ✓ Pour savoir si il est divisible par 3 et 9, on additionne tous ses chiffres : $2 + 7 + 8 + 1 = 18$
18 est divisible par 3 et par 9. Donc 2 781 est divisible par 3 et par 9.
- ✓ 2 781 ne se termine ni par 0 ni par 5, il n'est donc pas divisible par 5.

3) Reconnaître un nombre premier**Activité 6**

11 et 2 sont des nombres premiers car ils possèdent exactement 2 diviseurs positifs différents : 1 et eux même.

Par contre

34 admet 4 diviseurs : 1 ; 2 ; 17 et 34.

4 admet 3 diviseurs : 1 ; 2 et 4.

1 admet 1 seul diviseur : 1.

1, 4 et 34 ne sont donc pas des nombres premiers.

Définition :

On dit qu'un nombre entier naturel est premier lorsqu'il possède exactement deux diviseurs positifs différents : 1 et lui-même.

Remarques :

0 n'est pas un nombre premier car il possède une infinité de diviseurs.

le nombre 1 n'est pas un nombre premier car il possède un seul diviseur : lui-même.

Propriété admise :
Il existe une infinité de nombres premiers.

Annexe 5

Annexe 5

Exemple :

567 est il premier ?

On recherche si 567 admet d'autres diviseurs que 1 et lui même.

On utilise d'abord les critères de divisibilité.

567 est impair, il n'est donc pas divisible par 2.

567 est il divisible par 3 et/ou 9 ?

On calcul la somme de ses chiffres : $5 + 6 + 7 = 18$

18 est divisible par 3 et par 9. Donc 567 est divisible par 3 et par 9.

On peut conclure que 567 n'est pas un nombre premier.